1. Rodzaj pomiaru

1.1. Pomiar bezpośredni (prosty*)*

W przypadku pomiaru pojedynczej wielkości przyrządem wyskalowanym w jej jednostkach wartość niedokładności $\pm \Delta p$ określa graniczny błąd przyrządu analogowego lub cyfrowego zgodnie z zależnościami:

<u>Pomiar bezpośredni przyrządem wskazówkowym elektromechanicznym</u>

Bezwzględny błąd graniczny przyrządu (nazywany błędem instrumentalnym lub aparaturowym) wyznacza zależność

$$\Delta_g = \frac{\delta_{kl}}{100} \cdot \text{zakres pomiarowy} \quad \text{[jednostki wielkości mierzonej]}$$

Błąd ten wyraża się go w jednostkach wielkości mierzonej i ma wartość stałą dla wszystkich pomiarów wykonywanych na danym zakresie.

Procentowa wartość błędu względnego przyrządu jest równa

$$\delta p_{\%} = \delta_{kl} \cdot \frac{\text{zakres pomiarowy}}{\text{wartość wskazana}} \quad [\%],$$

a ***bezwymiarowa wartość błędu względnego*** pomiaru wartości wskazanej przez przyrząd na zastosowanym zakresie pomiarowym wynosi:

$$\delta p = \frac{\delta_{kl}}{100} \cdot \frac{\text{zakres pomiarowy}}{\text{wartość wskazana}}$$

Błąd względny jest najmniejszy dla wartości wskazanej równej zakresowi pomiarowemu i wynosi odpowiednio: $\delta p_{\%} = \delta_{kl}$ oraz $\delta p = \dfrac{\delta_{kl}}{100}$.

<u>Pomiar bezpośredni przyrządem cyfrowym</u>

W przeciwieństwie do przyrządów elektromechanicznych przyrządy cyfrowe nie mają określonej klasy dokładności. Informacje o parametrach umożliwiających obliczenie błędu pomiaru danych wielkości **podaje producent w instrukcji obsługi przyrządu**. Bezwzględny błąd pomiaru danej wielkości p miernikiem cyfrowym wyznacza się z zależności dwuskładnikowej:

$$\Delta p = (\Delta p)_1 + (\Delta p)_2,$$

w której $(\Delta p)_1$ jest składową multiplikatywną o wartości zmiennej, zależnej od wartości wskazanej na danym zakresie, a $(\Delta p)_2$ jest składową addytywną, niezależną od wartości wskazanej, i dla danego zakresu jej wartość jest stała. Błąd względny pomiaru wskazanej wartości jest równy

$$\delta p = \frac{\Delta p_1 + \Delta p_2}{\text{wskazanie}} = \frac{\delta_{1\%} \cdot 10^{-2} \cdot \text{wskazanie}}{\text{wskazanie}} + \frac{\Delta p_2}{\text{wskazanie}} = \delta_{1\%} \cdot 10^{-2} + \delta_2$$ [jednostka wielkości mierzonej]

Dla każdego zakresu pomiarowego informacja o składowych błędu pomiaru podana jest w jednej z dwóch poniższych postaci:

Postać pierwsza

± (% wartości wskazanej + % wartości zakresu pomiarowego)
± (% of reading + % of range)

Postać druga

± (% of rdg + m·dgt)
albo

± (% of rdg + m·LSD),

gdzie:

rdg, dgt i LSD są skrótami od wyrażeń w języku angielskim i oznaczają odpowiednio:

rdg ≡ **r**ea**d**in**g** (wartość wskazana, wskazanie)

dgt ≡ **digit** (cyfra)

LSD ≡ **L**east **S**ignificant **D**igit (najmniej znacząca cyfra)

Ponieważ 1 dgt = 1 LSD oznacza rozdzielczość na danym zakresie, która jest równa jednostce ostatniego pola odczytowego na tym zakresie, można zapisać ogólnie wyrażenie na błąd bezwzględny Δp i względny δp pomiaru wielkości p w postaciach:

Δp = ± (% wartości wskazanej + m-krotność rozdzielczości

δp = ± (Δp/wartość wskazana) = ± ($\delta_{1\%}$ /100 +(m·rozdzielczość)/wartość wskazana)

Dla poszczególnych zakresów pomiarowych producent określa parametry umożliwiające obliczenie błędu bezwzględnego i względnego. Parametrami tymi są wartości: $\delta_{1\%}$,, krotność m oraz rozdzielczość, którą na danym zakresie zawsze wyznacza wartość jednostki ostatniego pola odczytowego. Poniżej przedstawiono widok przykładowego przyrządu cyfrowego, multimetru z serii METEX, oraz tablicę, w której zamieszczono informacje podane w instrukcji przez producenta, umożliwiające obliczenie błędów pomiaru.

Przykład zestawienia parametrów podanych przez producenta multimetrów cyfrowych serii METEX w instrukcji obsługi; **rdg** ≡ skrót od **r**ea**d**in**g** czyli wartość wskazana wielkości mierzonej, **dgt** ≡ miara rozdzielczości odpowiadająca na danym zakresie jednostce ostatniego pola odczytowego

Model (*Typ*)	Function (*wielkość mierzona*)	Range (*zakres pomiarowy*)	Accuracy (*składowe błędu pomiaru*)	Resolution (*rozdzielczość*)
Seria M-4600 (B)	DC Voltage (*napięcie DC*)	200 mV	0,05% of rdg + 3dgt	10 µV
		2 V		100 µV
		20 V		1 mV
		200 V		10 mV
		1000 V	0,1% of rdg + 5 dgt	100 mV
	AC Voltage (*napięcie AC*)	200 mV	0,5% of rdg + 10 dgt	10 µV
		2 V		100 µV
		20 V		1 mV
		200 V		10 mV
		750 V	0,8% of rdg + 10 dgt	100 mV
	DC Current (*prąd DC*)	200 µV	0,3% of rdg + 3 dgt	10 nA
		2 mA		100 nA
		* 20 mA		1 µA
		200 mA	0,5% of rdg + 3dgt	10 µA
		* 2 A		100 µA
		20 A	0,8% of rdg + 5 dgt	1 mA
	AC Current (*prąd AC*)	* 200 µV	0,8% of rdg + 10 dgt	10 nA
		2 mA		100 nA
		* 20 mA		1 µA
		200 mA	1,0% of rdg + 10 dgt	10 µA
		* 2 A		100 µA
		20 A	1,2% of rdg + 15 dgt	1 mA
	Resistance (*rezystancja*)	200 Ω	2,0% of rdg + 10 dgt	0,01 Ω
		2 kΩ	0,15% of rdg + 3 dgt	0,1 Ω
		20 kΩ		1 Ω
		200 kΩ		10 Ω
		2 MΩ		100 Ω
		20 MΩ	0,5% of rdg + 5 dgt	1 kΩ
M-4630 (B)	Capacitance (*pojemność*)	2000 pF	2,0% of rdg +20 dgt	0,1 pF
		20 nF		1 pF
		200 nF		10 pF
		2 µF	3,0% of rdg +30 dgt	100 pF
		20 µF		1 nF
	Frequency (*częstotliwość*)	20 kHz	2,0% of rdg + 5dgt	1 Hz
		200 kHz		10 Hz
M-4650 (B)	Capacitance (*pojemność*)	2000 pF	2,0% of rdg +20 dgt	0,1 pF
		200 nF		10 pF
		20 µF	3,0% of rdg +20 dgt	1 nF

Uwaga: Oznaczone * zakresy prądu DC i AC obowiązują tylko dla typu M-4600

1.2. Pomiar pośredni. Prawo przenoszenia niepewności

Pomiar pośredni dotyczy wielkości złożonej, będącej funkcją wielkości pojedynczych zmierzonych bezpośrednio. Trzeba w nich uwzględnić prawo przenoszenia niedokładności wielkości składowych, stosując je do równania przetwarzania. Jeśli dla złożonego parametru p otrzymana estymata p_Y jest funkcją m wielkości, to traktując je jako m niezależnych zmiennych równanie przetwarzania można zapisać ogólnie w postaci funkcji F

$$p_Y = F(y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_m). \qquad (1)$$

Rozwijając tę funkcję w szereg Taylora wokół punktów odniesienia, którymi są znane, zmierzone wartości zmiennych y_i, określa się wagę udziału niedokładności bezpośredniego pomiaru danej zmiennej – czyli współczynnik wrażliwości k_w funkcji F na tę wielkość $k_{wi} = \partial F / \partial y_i$. Sposób przeniesienia się niedokładności składowych na wynik pomiaru zależy głównie od tego czy mogą być zakwalifikowane jako „małe” czy „duże”. Jeśli są małe - czyli niewielkie w porównaniu z wartościami zmiennych ($\Delta y_i << y_i$, a więc $\delta y_i = \Delta y_i / y_i << 1$), to można ograniczyć się do wyrazów pierwszego rzędu i wypadkowa niedokładność bezwzględna dla m wielkości składowych będzie równa

$$\Delta p = \sum_{i=1}^{m} k_{wi} \cdot \Delta y_i \ , \qquad (2)$$

a niedokładność względna odpowiednio

$$\delta p = \sum_{i=1}^{m} k_{wi} \cdot \frac{\Delta y_i}{p_Y} \ . \qquad (3)$$

Jeśli nie można zrobić wstępnych założeń odnośnie wartości Δy_i, to należy uwzględnić dalsze wyrazy szeregu Taylora albo zastosować metodę liczb tolerowanych, która jest uniwersalna w tym sensie, że umożliwia ujawnienie wszystkich niedokładności składowych.* Warto w tym miejscu także zwrócić uwagę, że obliczanie pochodnych cząstkowych k_{wi} jest konieczne w przypadkach, gdy dana wielkość występuje wielokrotnie w funkcji F – zastosowanie metody liczb tolerowanych mogłoby spowodować mniej wiarygodny opis niedokładności wypadkowej. W wyrażeniach (1.2) i (1.3) przyjmuje się najbardziej niekorzystny przypadek, tj. najgorszego rozłożenia błędów, gdy wszystkie wartości Δy_i i δy_i mają ten sam znak.

Do uproszczenia analizy niepewności wyniku pomiaru przyczynia się formalny opis zjawisk. W tym celu należy opisać sygnały i kolejne stopnie przetwarzania za pomocą typowych funkcji i układów pomiarowych. W tablicy 2 zestawiono zależności wyprowadzone przy zastosowaniu zależności (1.2) do kilku najczęściej występujących, typowych funkcji przetwarzania. Otrzymano uproszczony opis niedokładności wypadkowej, wystarczający w praktyce jeśli $\Delta y_i << y_i$, a więc $\delta y_i = \Delta y_i / y_i << 1$. Uwzględniając te relacje można ocenić niedokładność związaną z wielokrotnym złożonym przetwarzaniem wielkości w określonym systemie pomiarowym, rozkładając go na typowe układy pomiarowe i badając propagację niedokładności składowych.

---

* Liczba tolerowana jest liczbą wyrażającą wartość z podaniem jej niedokładności. Przykładowo, stosując metodę liczb tolerowanych dla funkcji mnożenia $y \pm \Delta y = (y_1 \pm \Delta y_1)(y_2 \pm \Delta y_2)$ otrzyma się dokładny opis niedokładności w postaci $\Delta y = y_2 \Delta y_1 + y_1 \Delta y_2 + \Delta y_2 \Delta y_1$, podczas gdy zastosowanie zależności (2.2) daje opis uproszczony w postaci $\Delta y = y_2 \Delta y_1 + y_1 \Delta y_2$, który jest wystarczający w przypadku niewielkich niedokładności, których iloczyn można zaniedbać.

Tablica 2. Propagacja niepewności w pomiarach pośrednich realizowanych za pomocą typowych funkcji przetwarzania

Rodzaj funkcji pomiarowej	Realizowane działanie $p_Y = F(y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_m)$.	Bezwzględna niedokładność Δp	Względna niedokładność $\delta p = \Delta p / p_Y$
Dodawanie	$p_Y = y_1 + y_2 + y_3 + \ldots$	$\Delta p = \Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3 + \ldots$	$\delta p = \frac{\Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3 + \ldots}{y_1 + y_2 + y_3 + \ldots}$
Odejmowanie	$p_Y = y_1 - y_2 - \ldots y_i \ldots - y_m$	$\Delta p = \Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3 + \ldots$	$\delta p = \frac{\Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3 + \ldots}{y_1 - y_2 - \ldots y_i \ldots - y_m}$
Mnożenie	$p_Y = y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot \ldots$	$\Delta p = \Delta y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot \ldots + \Delta y_2 \cdot y_1 \cdot y_3 \cdot \ldots +$ $+ \Delta y_3 \cdot y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots + \ldots$	$\delta p = \frac{\Delta y_1}{y_1} + \frac{\Delta y_2}{y_2} + \frac{\Delta y_3}{y_3} + \ldots =$ $= \delta y_1 + \delta y_2 + \delta y_3 + \ldots$
Dzielenie	$p_Y = {}^{y_1}\!/_{y_2}$	$\Delta p = (\Delta y_1 \cdot y_2 + \Delta y_2 \cdot y_1) \cdot \frac{1}{y_2^2}$	$\delta p = \frac{\Delta y_1}{y_1} + \frac{\Delta y_2}{y_2} = \delta y_1 + \delta y_2$
Potęgowanie	$p_Y = y^m$	$\Delta p = m \cdot \Delta y \cdot y^{m-1}$	$\delta p = m \cdot \frac{\Delta y}{y} = m \cdot \delta y$
Pierwiastkowanie	$p_Y = \sqrt[m]{y}$	$\Delta p = \frac{1}{m} \Delta y \cdot \sqrt[m]{y^{1-m}}$	$\delta p = \frac{1}{m} \Delta y \cdot \sqrt[m]{y^{-1}}$
Logarytmowanie	$p_Y = \ln y$	$\Delta p = \frac{1}{y} \Delta y$	$\delta p = \delta y \frac{1}{\ln y}$
Funkcje wykładnicze	$p_Y = a^y, \; a = const$	$\Delta p = y \cdot \Delta y \cdot \ln a$	$\delta p = \frac{1}{a^y} y \cdot \Delta y \cdot \ln a$
	$p_Y = \exp y$	$\Delta p = y \cdot \Delta y$	$\delta p = y \cdot \Delta y \cdot \exp(-y)$
Funkcje trygonometryczne	$p_Y = \sin y$	$\Delta p = \cos y \cdot \Delta y$	$\delta p = \mathrm{ctg}\, y \cdot \Delta y$
	$p_Y = \cos y$	$\Delta p = \sin y \cdot \Delta y$	$\Delta p = \mathrm{tg}\, y \cdot \Delta y$
	$p_Y = \mathrm{tg} y$	$\Delta p = \frac{1}{\cos^2 y} \cdot \Delta y$	$\delta p = \frac{1}{\cos y \cdot \sin y} \cdot \Delta y$
	$p_Y = \mathrm{ctg} y$	$\Delta p = \frac{1}{\sin^2 y} \cdot \Delta y$	$\Delta p = \frac{1}{\sin y \cdot \cos y} \cdot \Delta y$

Przykłady:

Pomiar mocy metodą techniczną:

- $P = U \cdot I$,
- bezwzględna niedokładność pomiaru: $\pm \Delta P = \pm(\Delta U \cdot I + \Delta I \cdot U)$;
- względna niedokładność pomiaru P: $\delta P = \delta U + \delta T$

Różnicowy pomiar napięcia:

- napięcie wypadkowe: $U = U_1 - U_2$,
- bezwzględna niedokładność pomiaru U: $\pm \Delta U = \pm(\Delta U_1 + \Delta U_2)$;
- względna niedokładność pomiaru U: $\delta U = \pm (\Delta U_1 + \Delta U_2) / (U_1 - U_2)$

Szeregowe połączenie trzech rezystorów o rezystancjach R_1, R_2 i R_3:

- rezystancja wypadkowa: $R = R_1 + R_2 + R_3$,

- bezwzględna niedokładność pomiaru R: $\pm \Delta R = \pm(\Delta R_1 + \Delta R_2 + \Delta R_3)$;
- względna niedokładność pomiaru R: $\pm [(\Delta R_1 + \Delta R_2 + \Delta R_3) / (R_1 + R_2 + R_3)]$

Ujemne sprzężenie zwrotne układu o transmitancji G_1 z gałęzią o transmitancji G_2:

- transmitancja wypadkowa: $G = G_1/(1+G_1 \cdot G_2)$,
- bezwzględna niedokładność jej wyznaczenia: $\pm \Delta G = \pm(\Delta G_1 + \Delta G_2 \cdot G_1^2)[1/(1+G_1 \cdot G_2)^2]$.